Lab 4 Przekształcenia liniowe

4.1. Sprawdzić czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające poniższe warunki. Czy jest ono wyznaczone jednoznacznie? Znaleźć φ o ile istnieje.

a) $\varphi(2,1,0) = (3,2,1)$, $\varphi(4,2,1) = (4,1,0)$, $\varphi(2,2,1) = (2,3,3)$, $\varphi(2,2,2) = (0,0,1)$,

b) $\varphi(1,2,1) = (1,2,0)$, $\varphi(1,2,0) = (1,2,1)$, $\varphi(0,2,1) = (1,3,1)$, $\varphi(0,2,0) = (1,3,2)$,

c) $\varphi(2,1,2) = (1,2,0)$, $\varphi(1,3,1) = (2,1,1)$, $\varphi(1,-2,1) = (-1,1,-1)$, $\varphi(3,-1,3) = (0,3,-1)$,

d) $\varphi(1,2,3) = (0,1,2)$, $\varphi(3,1,1) = (1,1,1)$, $\varphi(2,-1,-2) = (1,0,0)$, $\varphi(1,-3,-5) = (1,-1,-2)$.

4.2 Homomorfizm $F \in (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ma w bazie $\mathcal{B} = ([8\ ,-6\ ,7]^T, [-16,\ 7,\ -13]^T, [9,\ -3,\ 7]^T)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$.

Znaleźć jego macierz w bazie $([1,\ -2,\ 1]^T, [3,\ -1,\ 2]^T, [2,\ 1,\ 2]^T)$.

4.3. W celu zaszyfrowania przyporządkowano każdej literze alfabetu angielskiego liczbę według ich kolejności występowania w alfabecie. Szyfrowany tekst podzielono na bloki dugości trzy i każdemu blokowi przyporządkowano wektor z $v \in Z_{26}^3$.

Przekształcenie szyfrujące $E : Z_{26}^3 \to Z_{26}^3, \quad E(v) = Av$, gdzie macierz szyfrująca $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 19 \\ 5 & 23 & 25 \\ 20 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ Odszyfruj wiadomość

ITN NEP ACW ULA.

4.4 Znaleźć przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, jeśli $M_{\mathcal{C}}^{B}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, $\mathcal{C} = (1, x-1, x^2+x+1)$.

4.5 Znaleźć przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeśli $M_{\mathcal{C}}^{B}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$