Def.

Niech G będzie grafem spójnym. **Wierzchołek** x nazywamy **rozcinającym**, jeśli G\{x} jest niespójny.

Def.

Niech G będzie grafem spójnym. $V' \subseteq V(G)$ nazywamy **zbiorem rozcinającym** jeśli G\V' jest niespójny

Def.

Niech G będzie grafem spójnym. $E' \subseteq E(G)$ nazywamy **krawędziowym zbiorem rozcinającym** gdy G\E' jest niespójny.

Def.

Spójnością grafu G (ozn. κ(G)) nazywamy:

- Jeśli G <u>nie</u> jest grafem pełnym, najmniejsze **k**, że w G istnieje k–elementowy zbiór rozcinający
- Jeśli G jest grafem pełnym, |G|-1

Def.

Spójnością krawędziową grafu G (ozn. κ'(G)) nazywamy najmniejsze **k** t.ż.:

- G ma k–elementowy krawędziowy zbiór rozcinający jeśli $G \neq K_1$
- **$\kappa(K_1) := 0$**

Def.

Graf jest **k–spójny** jeśli $\kappa(G) \geq k$

Graf jest **k–krawędziowo spójny** jeśli $\kappa'(G) \geq k$

Tw.

$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$

Def.

$x, y \in V(G)$. Zbiór $X \subseteq V(G) \setminus \{x, y\}$ jest **xy separatorem** $G \setminus X$ jest niespójny i w $G \setminus X$ nie ma xy drogi. (inaczej: każda x-y droga przechodzi przez pewien wierzchołek w X)

Def.

Lokalną spójnością (ozn. κ_G(xy)) nazywamy:

- najmniejszą liczność xy separatora (jeśli xy nie jest krawędzią)
- $\kappa_H(xy)+1$ gdzie $H = G \setminus \{xy\}$ (jeśli xy jest krawędzią)

Tw.

$\kappa(G) = \min\{\kappa_G(xy): E(G) \ni xy, x \neq y\}$

Def.

Dwie xy drogi są **niezależne**, gdy jedynymi wspólnymi wierzchołkami tych dróg są x i y.

!Tw. Mengera

Niech x,y będą wierzchołkami grafu G ($x \neq y$). Maksymalna liczba xy dróg niezależnych jest równa spójności lokalnej $\kappa_G(xy)$.

Wniosek

Niech $G \neq K_1$. G będzie grafem k-spójnym wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych dwóch różnych wierzchołków w G istnieje k niezależnych dróg łączących te wierzchołki.

Tw.

Niech $|G| \geq 3$ i nie ma wierzchołków izolowanych ($\delta(G) > 0$). Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. G jest dwuspójny.
2. G nie ma wierzchołka rozcinającego.
3. Każde dwa wierzchołki G leżą na wspólnym cyklu.
4. Każdy wierzchołek i krawędź leżą na wspólnym cyklu.
5. Każde dwie krawędzie leżą na wspólnym cyklu.

Problem:

Znaleźć k-spójny podgraf rozpinający grafu G o minimalnej wadze. (Problem niezawodności).

Tw.

$f(n,k) = \left\lceil \frac{nk+1}{2} \right\rceil$ (Trzeba znaleźć graf k-spójny o n wierzchołkach i $\left\lceil \frac{nk+1}{2} \right\rceil$ krawędziach)

Def.

Ścieżką Eulera w grafie G nazywamy ścieżkę

$s = v_0 e_1 v_1 \ldots v_{n-1} e_n v_n \forall i \exists e_i \in s \wedge e_i \neq e_j \, dla \, i \neq j$

!Tw. Eulera

Niech dany będzie graf G. G ma obwód Eulera <=> Gdy wszystkie wierzchołki mają parzyste stopnia oraz graf G jest spójny.

Lemat

Jeżeli G jest grafem tż. $\delta(G) \geq 2$ to G ma pewien cykl.

Uwaga

Twierdzenie Eulera pozostaje prawdziwe dla multigrafów.

Wniosek

Multigraf G spójny ma ścieżkę Eulera, gdy G ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

!Lemat

Jeżeli graf G jest spójny i ma wszystkie wierzchołki parzystego stopnia to G nie zawiera mostu. (To jest Lemat niezbędny do udowodnienia Tw. Eulera)

Def.

Marszruta ciąg wierzchołków i krawędzi, tż. każdy wierzchołek należy do krawędzi przed nim i za nim.

Def.

Drogę, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu G nazywamy drogą Hamiltona.

Def.

Cykl, który zawiera wszystkie wierchołki grafu G nazywamy cyklem Hamiltona (cykl rozpinający).

Tw.

Jeżeli G ma cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V(G) \wedge S \neq \emptyset$ liczba składowych (**ozn. ω(G)**) G\S jest nie większa niż |S|.

!Tw. Diraca

Jeżeli G jest grafem, tż $|G| \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{|G|}{2}$ to G ma cykl Hamiltona.

Tw. Ore

Jeżeli w grafie *G* o n wierzchołkach, $n > 2$ zachodzi następująca nierówność:

$\deg_G(v) + \deg_G(u) \geq n$

dla każdej pary **nie połączonych bezpośrednio** krawędzią wierzchołków u i v (tj. takich, że $\{v, u\} \notin E(G)$), to graf *G* jest hamiltonowski.

!Problem komiwojażera

Graf G := K_n nieskierowany, oraz funkcja wag $w: E(G) \rightarrow [0, \infty)$. Znaleźć cykl Hamiltona o minimalnej wadze.

!Algorytm APK

Procedura PW(v) (preorder)

1) Drukuj v
2) Dla każdego następnika v ozn. v_i wykonaj PW(v_i).

APK:

1) Wybierz wierzchołek startowy v
2) Skonstruuj T := minimalne drzewo rozpinające (np. algorytmem Kruskala)
3) Wykonaj PW(v) dla T

Def.

Warunek trójkąta: $\forall_{x,y,z \in V(G)} w(x,y) + w(y,z) \geq w(x,z)$

!Tw.

Jeśli dla grafu G spełniony jest warunek trójkąta to algorytm APK konstruuje cykl Hamiltona o co najwyżej dwukrotnie większej wadze od minimalnego.

Def.

Graf G nazywamy **dwudzielnym** jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa podzbiory X, Y, tż. jeśli e należy do E(G) to jeden jej koniec należy do X a drugi do Y.

Oznaczenie

G = (X,Y,E) – graf dwudzielny o podziale wierzchołków X, Y i zbiorze krawędzi E.

Def.

Graf dwudzielny nazywamy **dwudzielnym pełnym** jeśli $(\forall x \in X, y \in Y)\, xy \in E$. Jeśli

$|X| = m$, $|Y| = n$ oznaczamy go $K_{m,n}$

!Tw.

Graf G jest dwudzielny <=> kiedy G nie zawiera nieparzystych cykli.

Def.

Skojarzenie to graf, w którym każda składowa jest izomorficzna z K_2. (Zbiory rozłącznych krawędzi.)

Def.

Niech dany będzie graf G. Podgraf M grafu nazywamy **skojarzeniem doskonałym** jeśli M jest skojarzeniem, które jest grafem rozpinającym. (Tzn. V(M) = V(G))

Def.

k–kolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy funkcję ze zbioru krawędzi w zbiór C gdzie |C| = k. C nazywamy zbiorem kolorów.

Def.

k–kolorowanie nazywamy **dobrym** (właściwym) jeśli żadne dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku nie są tego samego koloru.

Czyli dobre k–pokolorowanie krawędzi G jest to podział zbioru krawędzi grafu G (E(G)) na podzbiory $E_1 \ldots E_k$ indukujące w G skojarzenia. E_i mogą być puste.

Uwaga

- Graf G ma zawsze dobre e(G) pokolorowanie.
- Jeżeli G ma dobre k–pokolorowanie i $l \geq k$ to G ma też dobre l–pokolorowanie.

Oznaczenie

Niech C: E(G) -> {1,..., k}będzie niekoniecznie dobrym k–pokolorowaniem.

$l_C(v) := |\{C(e)\text{: v należy do e}\}|$

Def.

Indeksem chromatycznym (ozn. $\chi'(G)$) grafu G nazywamy najmniejsze takie k, że G ma dobre k–pokolorowanie.

!Tw. Vizinga

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Uwaga

- $l_C(v) \leq \deg(v)$
- K – pokolorowanie jest dobre <=> $(\forall v \in V(G))\, l_C(v) = deg_G(v)$

Def.

k–pokolorowanie C' krawędzi G jest lepsze niż k – pokolorowanie C krawędzi G jeżeli:

$$\sum_{v \in V(G)} l_{C'}(v) > \sum_{v \in V(G)} l_C(v)$$

Def.

k–pokolorowanie jest optymalne jeśli nie istnieje od niego lepsze.

!Lemat 1

Niech G będzie grafem spójnym, który nie jest nieparzystym cyklem. Wtedy G ma

2–kolorowanie (niekoniecznie dobre) tż. Każdy wierzchołek st. ≥ 2 jest końcem krawędzi w obu kolorach.

!Lemat 2

Niech C = {E_1,...,E_k} będzie k–pokolorowaniem optymalnym jeśli istnieje wierzchołek *u* w *G* i kolory: *i*, *j* tż. *u* nie jest końcem krawędzi koloru *i*, ale będą co najmniej dwie w kolorze *j*. To składowa spójności G[E_i u E_j] która zawiera *u* jest nieparzystym cyklem.

Def.

Blok to maksymalny podgraf dwuspójny.

Tw.

Jeśli graf G jest dwudzielny to indeks chromatyczny $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Tw. Shanona

Dla dowolnego multigrafu G:

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq (3/2)*\Delta(G)$

Def.

k–kolorowaniem wierzchołków grafu G nazywamy funkcję ze zbioru wierzchołków w zbiór C gdzie |C| = k.

Def.

k–kolorowanie nazywamy **dobrym** (właściwym) jeśli każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne kolory.

Def.

Podzbiór U < V(G) nazywamy **niezależnym** jeśli graf indukowany przez ten zbiór G(U) ma pusty zbiór krawędzi.

Def.

Liczbą chromatyczną (ozn. $\chi(G)$) grafu G nazywamy najmniejsze takie k, że G ma dobre k–pokolorowanie.

Def.

G jest **krytyczny** jeśli dla każdego istotnego podgrafu $H \subset G$ zachodzi:

$\chi(H) < \chi(G)$

Def.

Graf jest **k – krytyczny** jeśli jest krytyczny i $\chi(G) = k$.

Fakt

Każdy graf o liczbie chromatycznej k zawiera podgraf k–krytyczny.

Tw.

Jeśli graf jest k–krytyczny to $\delta(G) \geq k - 1$

Wniosek 1

Jeśli $\chi(G) = k$ to w G istnieje k wierzchołków stopnia co najmniej k – 1.

Wniosek 2

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Def.

Klika – zbiór wierzchołków podgrafu pełnego.

$\chi(G) \geq$ liczność najliczniejszej kliki w G.

!Tw. Decortes'a, Mycielskiego

Dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje graf bez trójkątów G_k tż. $\chi(G_k) = k$.

Tw. Brooksa

Jeśli G nie jest grafem pełnym i nie jest nieparzystym cyklem to $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Koniec części pierwszej.

Uwaga

Na potrzeby dalszych rozważań przyjmujemy, że graf oznaczać może również multigraf.

Def.

Grafem płaskim (planarnym) nazywamy graf, który może być zanurzony na płaszczyźnie w taki sposób, że jeśli dwie krawędzie mają wspólny punkt to jest to ich wspólny wierzchołek

Oznaczenie

Zanurzeniem z definicji nazywamy reprezentację płaską grafu płaskiego.

Tw.

Grafy K_5 oraz $K_{3,3}$ nie są płaskie

Uwaga

K_5 oraz $K_{3,3}$ da się narysować na torusie.

Uwaga

$K_{3,3}$ da się narysować na wstędze Moebiousa.

Tw.

Graf jest zanurzalny płasko w płaszczyznę <=> gdy jest zanurzalny płasko w sferę.

Def.

Reprezentacja płaska grafu płaskiego dzieli płaszczyznę na obszary zwane **regionami**.

Oznaczenie

F(G) – zbiór regionów dla reprezentacji G.

$\phi(G)=|F(G)|$

Def.

Mówimy, że **region** f jest **incydentny** z krawędzią e jeśli e leży na brzegu (granicy) regionu.

Fakt

Jeżeli krawędź nie jest mostem to jest incydentna z dokładnie dwoma regionami.

Jeżeli jest mostem to dokładnie z jednym.

Def.

Stopniem regionu nazywamy liczbę krawędzi z nim incydentnych.

Def.

G – reprezentacja płaska grafu G.

Graf dualny (ozn. G*).

a) wierzchołkami w G* są regiony w G V(G*) ~ F(G)

b) pary $f^*, g^* \in V(G^*)$ są połączone w G* p krawędziami jeśli regiony f,g mają wspólne p krawędzi.

Własności:

1) Grafy dualne dla dwóch różnych reprezentacji tego samego grafu nie muszą być izomorficzne.
2) Graf dualny do reprezentacji płaskiego grafu jest również płaski.

3) $|G^*| = \phi(G)$

4) $e(G^*) = e(G)$

5) $\forall f \in F(G) \deg_G f = \deg_{G^*} f^*$

Tw.

Niech G będzie płaską reprezentacją grafu wtedy:

$$\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = \sum_{f^* \in V(G^*)} \deg_{G^*} f^* = 2e(G^*) = 2e(G)$$

!Tw. Eulera (1756)

G jest reprezentacją płaską grafu spójnego to:

$$|G| - e(G) + \phi(G) = 2$$

Wniosek

Jeżeli G jest grafem prostym grafem planarnym to $\delta(G) \le 5$ a $e(G) \le 3|G| - 6$

Def.

Talią nazywamy długość najkrótszego cyklu.

Def.

Grubość t(G) := min k tż.:

$$\exists k, H_1, \ldots, H_k : E(G) = E(H_1) \cup \ldots \cup E(H_k), \forall_{i \in \{1, \ldots, k\}} H_i \text{ jest planarny}$$

Własności:

1) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \ge n$

2) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \ge 2\sqrt{n}$

3) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \le n + 1$

4) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \le \frac{(n+1)^2}{4}$

5) talia $k \ge 3$ => $e(G) \le \frac{k(n-2)}{k-2}$

6) $t(G) \ge \left\lceil \frac{e(G)}{3|G| - 6} \right\rceil$ (sufit)

Def.

Podpodziałem krawędzi xy w grafie G nazywamy opreację polegającą na usunięciu krawędzi xy dodaniu wierzchołka z ($z \notin V(G)$) oraz krawędzi xz, zy.

Def.

Podpodziałem grafu G nazywamy graf H jeśli H można utworzyć z G przez ciągi podziału krawędzi.

Tw. Kuratowskiego (1930)

Graf G jest płaski <=> gdy G nie zawiera podpodziału grafu K_5 lub $K_{3,3}$.

!Tw. Appel, Haben

Jeżeli graf jest planarny => $\chi(G) \le 4$

!Tw. Headwooda (1890)

Jeżeli graf jest planarny => $\chi(G) \le 5$

Def.

Niech G będzie dwudzielnym grafem G = (A,B,E) a M skojarzeniem w G. Drogę, zaczynającą
się w pewnym wierzchołku $a \in A$, t.ż. a nie jest końcem żadnej krawędzi z M, składającą się na przemian z krawędzi z E(G)\E(M) oraz E(M) nazywamy drogą naprzemienną względem M.

Def.

Drogę nazywamy nienasyconą jeśli kończy się w B w wierzchołku, który nie jest końcem żadnej krawędzi z M.

Def.

Pokryciem wierzchołkowym grafu G nazywamy zbiór $C \subseteq V(G)$ t.ż. każda krawędź w G ma przynajmniej jeden koniec w C.

Tw.

W dowolnym grafie dwudzielnym rozmiar największego pokrycia wierzchołkowego jest równy liczności (liczbie krawędzi) w najliczniejszym skojarzeniu w G.

Tw. Halla (wersja małżeńska)

Jeśli dla każdego podzbioru panien S zb. kawalerów akceptowanych przez przynajmniej jedną pannę z S jest mocy co najmniej |S| to można wydać wszystkie panny za mąż za kawalerów, których akceptują.

Oznaczenie

$N(v) = \{u : u \in E(G)\}$

$N(S) = U v \in S\, N(v)$

!Tw. Halla (wersja grafowa)

Niech G będzie grafem dwudzielnym G = (A,B,E). Istnieje skojarzenie pokrywające wszystkie
wierzchołki z A <=> $\forall S \subseteq A\ |N(S)| \ge |S|$

Def.

$(A_{1,} \ldots, A_n)$ – ciąg podzbiorów pewnego skończonego zbioru X. Ciąg $(a_{1,} \ldots, a_n) \in X$ nazywamy systemem różnych reprezentantów (transwersalem) <=>

1) $\forall i \ne j\ a_i \ne a_j$
2) $\forall i\ a_i \in A_i$

Tw. Halla (wersja transwersalowa)

Dla ciągu zbiorów $A_{1,} \ldots, A_n$ istnieje system różnych reprezentantów <=>
$\forall i \in \{1,\ldots, n\}\ |J| \le |U i \in J\, Ai|$

Def.

Parę S = (G, c), gdzie G jest grafem skierowanym a $c: E(G) \to \mathbb{R}_+$ funkcją, nazywamy siecią.

Dla dowolnej funkcji $f: E(G) \to \mathbb{R}_+$ i dowolnego wierzchołka v w sieci S rozważamy wielkość:

$$\mathrm{div}_f = \sum_{u:(vu)\in E} f(vu) - \sum_{u:(uv)\in E} f(uv)$$

Def.

Niech S będzie siecią, s, t, wyróżnionymi wierzchołkami (s – source; t – target)
Przepływem z s do t nazywamy dowolną funkcję $f: E(G) \to \mathbb{R}+$ t.ż.

1) $0 \le f(u,v) \le c(uv)\ \ (\forall uv)$
2) $\forall v \in V(G) \setminus \{s,t\}\ \mathrm{div}_f(v) = 0$

Wielkość $W(f) = \mathrm{div} f(s)$ nazywamy **wartością przepływu**.

Def.

Przekrojem P(A) odpowiadającym niepustemu podzbiorowi A zbioru wierzchołków nazywamy zbiór krawędzi $P(A) = E \cap (A \times (V \setminus A))$

Def.

Przepływ przez przekrój P(A) definiujemy przez: $f(A, A\setminus V) = \sum_{e \in P(A)} f(e)$

Lemat

Jeżeli $s \in A \quad t \notin A \quad A \subseteq V(G)$ to dla dowolnego przepływu f z s do t $w(f) = \mathrm{div}_f(s) = \sum_{v \in A} \mathrm{div}_f(v)$

Def.

Niech $A \subset V \; A \neq \emptyset$. **Przepustowością** przekroju P(A) nazywamy $c(A, A\setminus V) = \sum_{a \in P(A)} c(a)$

Def.

Minimalny przekrój między s i t jest to przekrój P(A) $s \in A \quad t \notin A$ o minimalnej przepustowości.

!Tw. Forda, Fulkersona

Wartość każdego przepływu z s do t w sieci S nie przekracza przepustowości minimalnego przekroju przy czym istnieje przepływ osiągający tę wartość.

Def.

Krawędź sieci S nazywamy **użyteczną** z u do v względem przepływu f jesli $e = uv \quad f(e) < c(e) \vee e = vu \quad f(e) > 0$

Def.

Ścieżką rozszerzającą dla danego przepływu f z s do t nazywamy ścieżkę $s = v_0 \, e_1 \ldots e_l \, v_l = t$ tż. $\forall i \in \{1, \ldots, l\} \, e_i$ jest krawędzią użyteczną z s do t względem f.

Niech

$$\Delta(e_i) = \begin{Bmatrix} c(e_i) - f(e_i) & e_i \, zgodne \\ f(e_i) & e_i \; przeciwne \end{Bmatrix}$$

$$\delta = min\{\Delta(e_i) : i = 1, \ldots, l\}$$

Zdefiniujmy nowy przepływ:

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} f(e_i) + \delta & e_i \, użyteczna \; zgodna \\ f(e_i) - \delta & e_i \, użyteczna \; przeciwna \\ f(e_i) & wpp \end{Bmatrix}$$

$$W(\tilde{f}) = W(f) + \delta$$

Tw.

Następujące warunki są równoważne:

1) Przepływ z s do t jest maksymalny
2) Nie istnieje ścieżka rozszerzająca z s do t względem f
3) $W(f) = C(A, V \setminus A)$ dla pewnego $A \in V, że \, s \in A, t \notin A$

Def.

Matroidem nazywamy parę: M = (E, C) tż $|E| < \infty \quad C \subseteq P(E)$

1) $\emptyset \in C \quad \forall A, B \subseteq E \quad A \subset B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$
2) $\forall A, B \in C \quad |A| + 1 = |B| \Rightarrow \exists e \in B \quad A \cup e \in C$

Tw.

Niech rodzina C podzbioru E spełnia warunek (1) z def. matroidu. Para M = (E,C) jest matroidem <=> (3) dla dowolnego podzbioru $D \subseteq E$ każde dwa maksymalne w D (w sensie $\subseteq$) podzbiory z C mają tę samą liczność. (podzbiory z C nazywamy niezależnymi)

Wniosek

Zbiory maksymalne (zbiory niezależne) w E są tej samej liczności – bazy matroidu M.

Problem 3

E – *zb. skończony* $C \subseteq P(E) = 2^E$
$w: E \to [0, \infty)$

Znaleźć $s \in C$ tż. $\sum_{e \in S} w(e)$ jest największa.

Algorytm zachłanny

1) Posortuj elementy wg wag $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_n)$
   $S := \emptyset$
2) Dla i = 1, ..., n
   Jeśli $S \cup \{e_i\} \in C$ to $S := S \cup \{e_i\}$

!Tw. Edmondsa, Rado (1971)

Jeśli M = (E,C) jest matroidem to zbiór S, znaleziony przez algorytm zachłanny będzie tym najlepszym.

Tw.

Jeśli M = (E, C) nie jest matroidem to istnieje funkcja $w: E \to [0, \infty)$ tż. zbiór znaleziony przez algorytm zachłanny nie jest zbiorem z C o maksymalnej wadze.

Def.

$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ rodzina zbiorów (czyli zbiory mogą się powtarzać) pewnego zbioru E. Podzbiór $\mathcal{S}$ nazywamy selektorem częściowym A jeśli istnieje odwzorowanie różnowartościowe $\phi: S \to \{1, \dots, n\}$ tż. $\forall e \in S \;\; e \in A_{\phi(e)}$

!Tw. Edmondsa, Fulkersona

Niech $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ będzie rodziną podzbiorów E i niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną selektorów częściowych rodziny A Wtedy m(A) = (E, $\mathcal{S}$) jest matroidem.

Tw. Ramseya (1930)

Dla dowolnych liczb $r, t \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego ciągu liczb $\mathbb{N}(q_1, \dots, q_n)$ istnieje liczba n tż. jeśli $|X| = n$ $P_r(X) = A_1 \cup \dots \cup A_t$ $(\forall_{i,j=1,\dots,t} i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$ to:
$\exists i \in \{1, \dots, t\}$ $Y \subseteq X$ $|Y| \geq q_i$ $P_r(Y) \subseteq A_i$

Def.

Najmniejsze n, o którym mowa w twierdzeniu nazywamy liczbą Ramseya $R_r(q_1, \dots, q_t)$

Szczególne przypadki:
(r = 1)

Tw. (Zasada podziałowa)

Niech $X = X_1 \cup \dots \cup X_t$ $\forall_{i,j=1,\dots,t} i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$

Jeśli $|X| \geq \sum_{i=1}^{t} q_i - t + 1$

to $\exists i \in \{1, \dots, t\}$ $|X_i| \geq q_i$

(r = 2)

!Tw. Ramseya

Dla dowolnych $t, q_1, \ldots, q_t \in \mathbb{N}$ istnieje takie n, że jakkolwiek pokolorujemy krawędzie grafu pełnego K_n na t kolorów to będzie istniał kolor i oraz podzbiór zbioru wierzchołków Y rozmiaru co najmniej q_i tż. wszystkie krawędzie Y będą w kolorze i.

!Tw. (t = 2)

Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{N}$ istnieje takie n, że jakkolwiek pokolorujemy krawędzie grafu pełnego K_n na niebiesko i czerwono to będzie istniał podgraf pełny o p wierzchołkach i wszystkich krawędziach niebieskich lub podgraf pełny o q wierzchołkach i wszystkich krawędziach czerwonych.