

## MD 1 Indukcja, Zliczanie

Udowodnić indukcyjnie:

$$1.1 \quad 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1},$$

$$1.2 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$1.3 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{6},$$

$$1.4 \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}(1+n)^2 n^2,$$

$$1.5 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$1.6 \quad 2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2,$$

$$1.7 \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

$$1.8 \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2,$$

$$1.9 \quad n^3 < 4^n,$$

$$1.10 \quad 3^n > n2^2,$$

$$1.11 \quad \binom{2n}{n} > 2n \text{ dla } n > 1,$$

$$1.12 \quad 5n \leq n^2 - 3 \text{ dla } n \geq 6,$$

$$1.13 \quad 8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1,$$

$$1.14 \quad 8 \mid 11^n - 3^n,$$

$$1.15 \quad 11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2},$$

$$1.16 \quad 133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1},$$

$$1.17 \quad 9 \mid 4^n + 24n - 1.$$

1.18 Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

1.19 Za przesłanie listu poleconego trzeba zapłacić 18 złotych. Mamy nieograniczony zapas znaczków pocztowych o nominałach 4 zł., 6 zł. i 10 zł. Na ile sposobów można nakleić znaczki na kopertę

jeśli dwa sposoby naklejania różniące się kolejnością naklejania uważamy za różne?

1.20 Ile jest palindromów długości  $n$  (zakładamy, że alfabet ma 26 liter)?

1.21 Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5, a ile z cyfr 0,1,2,3,4 ?

1.22 Ile jest liczb 5-cyfrowych wyglądających tak samo normalnie i po odwróceniu o kąt  $180^\circ$ ? Zakładamy, że następujące pary cyfr odpowiadają sobie przed i po odwróceniu 0 – 0, 1 – 1, 6 – 9, 8 – 8, 9 – 6.

1.23 Na ile sposobów można wybrać 6 kart z talii 52 kart tak, aby wśród nich były karty wszystkich czterech kolorów?

1.24 Ile jest liczb sześciocyfrowych, których suma cyfr jest liczbą parzystą?

1.25 Na ile sposobów można zestawić trzy pary spośród  $n$  szachistów?

1.26 Ile jest liczb pomiędzy 0 a  $10^n$ , w których nie występują obok siebie dwie jednakowe cyfry?

1.27 Ile jest możliwych rezultatów, którymi mogą się zakończyć zawody, w których startuje 10 osób w trzech konkurencjach, jeśli każda osoba startuje w jednej, dowolnie wybranej przez siebie konkurencji?

1.28 W sklepie jest  $k$  rodzajów kart pocztowych.

a) Na ile sposobów można wysłać pozdrowienia do  $n$  przyjaciół, jeśli każdy ma otrzymać dokładnie jedną kartkę?

b) Jak zmieni się odpowiedź, przy założeniu, że każdy z przyjaciół ma otrzymać inną kartkę? c) Jak zmieni się odpowiedź, gdy do każdej osoby chcemy wysłać dwie różne kartki?