MD 3 Grafy

3.1 Znaleźć wszystkie nieizomorficzne grafy o 4 wierzchołkach.

3.2 Czy istnieją grafy o następujących ciągach stopni wierzchołków :
a) (5,4,2,2,1,1), b) (4,4,4,3,3,3),
c) (2,2,1,1,1,1), d) (5,5,4,4,2,2),
e) (7,7,7,3,3,3,2,2), f) (7,7,4,4,3,3,2,2) ?

3.3 Czy każde dwa grafy o tym samym ciągu stopni są izomorficzne?

3.4 Graf o 21 krawędziach ma 7 wierzchołków stopnia 1, 3 wierzchołki stopnia 2, 7 wierzchołków stopnia 3, a pozostałe wierzchołki mają stopień 4. Ile wierzchołków ma ten graf? Narysuj go.

3.5 Czy istnieje graf 5-regularny o 11 lub 12 wierzchołkach? Pokazać przykład.

3.6 Narysuj wszystkie grafy kubiczne (3-regularne) o co najwyżej 8 wierzchołkach.

3.7 **Dopełnieniem grafu** G nazywamy graf $\overline{G} = (V(G), \overline{E})$, gdzie $\overline{E} = P_2(V(G)) - E(G)$. Graf nazywamy **samodopełniającym** jeśli $G \cong \overline{G}$. Wykazać, że liczba wierzchołków w grafie samodopełniającym jest postaci $4k$ lub $4k+1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

3.8 Podaj przykłady grafów samodopełniających o 4, 5, 6, 7, 8 i 9 wierzchołkach.

3.9 Udowodnij, że jeśli dwa różne cykle w grafie G zawierają tę samą krawędź e, to w grafie G istnieje cykl nie zawierający e.

3.10 Pokazać, jeśli $e(G) > \binom{n-1}{2}$ to graf G jest spójny.

3.11 Pokazać, jeśli $\delta(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ to G jest spójny.

3.12 Pokazać, jeśli $\delta(G) \geqslant 2$ to G zawiera cykl.

3.13 Czy prawdziwe jest stwierdzenie : jeśli

$$\forall_{v \in V(G)} \deg(v) \geqslant 2$$

i jest parzysty to każdy wierzchołek należy do pewnego cyklu ?

3.14 Pokazać, $\delta(G) \leqslant \frac{2e(G)}{n} \leqslant \Delta(G)$.

3.15 Udowodnić, że jeśli T jest drzewem oraz $\Delta(T) \geqslant k$ to T ma co najmniej k wierzchołków stopnia 1.

3.16 Udowodnić, że jeśli G jest grafem spójnym oraz $e \in E(G)$ to e jest w każdym drzewie rozpinającym w G wtedy i tylko wtedy, gdy e jest mostem.

3.17 Niech $e(G) = |G| - 1$. Pokazać, że wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) G jest spójny
(ii) G jest acykliczny
(iii)G jest drzewem.

3.18 Pokazać, że w każdym drzewie każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą.

3.19 Niech T będzie drzewem rozpinającym grafu G oraz niech $e \notin E(T)$. Pokaż, że $T + e$ zawiera dokładnie jeden cykl.

3.20 Pokazać, że $\omega(G) + e(G) \geqslant n$ dla dowolnego grafu G. ($\omega(G)$ - liczba składowych grafu G).

3.21 Pokazać, że każdy graf spójny zawiera wierzchołki, których usunięcie nie powoduje rozspójnienia grafu.

3.22 Pokazać, że w każdym grafie spójnym każde dwie drogi maksymalnej długości mają wspólny wierzchołek.