MD 4 spójność, obwód Eulera, cykl Hamiltona, kolorowanie

4.1 Pokazać, że jeśli $\delta(G) \geqslant \frac{n+k-2}{2}$ to $\kappa(G) \geqslant k$.

4.2 Pokazać, że jeśli każdy wierzchołek w G ma stopień parzysty to G nie ma krawędzi rozcinających.

4.3 Pokazać, że jeśli graf G jest k-regularny ($k \geqslant 2$) i dwudzielny to G nie ma krawędzi rozcinających.

4.4 Pokazać, że jeśli graf G jest 3-regularny to $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

4.5 Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $a \leqslant b \leqslant c$ istnieje graf G taki, że $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$, $\delta(G) = c$.

4.6 Pokazać, że jeśli G jest spójny i ma $2k$ wierzchołków stopnia nieparzystego to istnieją krawędziowo rozłączne ścieżki $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, takie że $E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \ldots \cup E(Q_k) = E(G)$.

4.7 Podać przykład grafu spójnego, który
a) nie ma cyklu Eulera i nie ma cyklu Hamiltona
b) ma cykl Eulera i nie ma cyklu Hamiltona
c) nie ma cyklu Eulera i ma cykl Hamiltona
d) ma cykl Eulera i ma cykl Hamiltona.

4.8 Pokazać, że jeśli graf G jest 6-regularny i ma 11 wierzchołków to G ma cykl Hamiltona.

4.9 Pokazać, że jeśli graf G jest dwudzielny o klasach X i Y oraz $|X| \neq |Y|$ to G nie jest hamiltonowski.

4.10 Dla grafu $G = (V, E)$ definiujemy graf krawędziowy $L(G) = (E, F)$ gdzie $e, f \in E$ tworzą krawędź w $L(G)$ jeśli w G mają wspólny koniec. Jak zależą od siebie eulerowskość i hamiltonowskość w G i $L(G)$.

4.11 Znaleźć (o ile istnieje) graf eulerowski z parzystą liczbą wierzchołków i nieparzystą liczbą krawędzi.

4.12 Jaka jest liczba chromatyczna grafu otrzymanego z grafu pełnego K_n przez wyrzucenie a) jednej krawędzi, b) dwóch krawędzi, c) trzech krawędzi tworzących trójkąt

4.13 Niech $(d_1, .., d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków grafu G.
Wykazać, że $\chi(G) \leqslant \max_{i\in\{1,..,n\}} \min\{d_i + 1, i\}$.

4.14 Pokazać, że graf G ma co najmniej $\chi(G)$ wierzchołków stopnia $\chi(G) - 1$ lub większego.

4.15 Znaleźć dobre krawędziowe $\chi'(G)$-pokolorowanie grafów: $K_{2k}, K_{2k+1}, K_{n,m}$, Petersena.

4.16 Udowodnić, że jeśli G jest 3 regularnym grafem hamiltonowskim to $\chi'(G) = 3$.

4.17 Niech G będzie spójnym grafem k regularnym o nieparzystej liczbie wierzchołków. Pokazać, że $\chi'(G) = k + 1$.

4.18 Niech M i N będą rozłącznymi skojarzeniami w G, takimi że $|M| > |N|$. Pokazać, że istnieją wówczas rozłączne skojarzenia M' i N', takie że $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$ oraz $M \cup N = M' \cup N'$.

4.19 Udowodnić, że jeśli G jest grafem dwudzielnym i $p \geqslant \Delta(G)$ to w G istnieje p rozłącznych skojarzeń $M_1, M_2, \ldots, M_p$, takich że $E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$ oraz dla $1 \leqslant i \leqslant p$ zachodzi

$$\left\lfloor \frac{e(G)}{p} \right\rfloor \leqslant |M_i| \leqslant \left\lceil \frac{e(G)}{p} \right\rceil.$$