MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 1

dr inż Krzysztof Bryś

Wprowadzenie

Istnieją dwa różne kryteria mówiące, które narzędzia matematyczne należy zaliczyć do matematyki dyskretnej.

Pierwsze definiuje matematykę dyskretną jako gałąź matematyki zajmującą się zbiorami skończonymi i przeliczalnymi oraz ich własnościami.

Drugie kryterium mowi, że pod pojęciem matematyka dyskretna kryje się zbiór narzędzi matematycznych wykorzystywanych w informatyce do projektowania i analizy algorytmów komputerowych. Matematyka dyskretna bywa nazywana matematycznymi podstawami informatyki.

To drugie kryterium zdaje się być trafniejszym. Wyjaśnia przede wszystkim ogromny wzrost zainteresowania i rozwój matematyki dyskretnej w ostatnich latach. Inna sprawa, że te same narzędzia matematyczne, które służa informatykowi do analizy algorytmów mogą byc przydatne również w innych dziedzinach nauki i życia. Wystarczy uświadomić sobie, że przepis kulinarny też jest algorytmem. Kurs matematyki dyskretnej przyda się zapewne nie tylko przyszłemu informatykowi ale również studentowi chemii, zarzadzania czy nawet psychologii.

Zacznijmy nasz kurs od przypomnienia pewnych podstawowych pojęć matematycznych, których znajomość jest niezbędna dla dobrego zrozumienia dalszej treści wykładu.

A. Pojęcia wstępne

Pojęcie zbioru

Na początek przypomnijmy sobie kilka elementarnych pojęć matematycznych.

Przez *uniwersum* będziemy rozumieć zbiór wszystkich rozważanych obiektów (np. studentów Politechniki)

Zbiór jest pojęciem definiowanym przez jednoargumentową relację przynależności. Składa się z wszystkich elementów uniwersum, które do niego należą. Często zbiór jest wyznaczany przez pewną własność obiektów uniwersum i składa się z tych elementów, które posiadają daną własność.

Niech U- uniwersum czyli zbiór wszystkich rozważanych obiektów (np. studentów Politechniki). Dla zbioru A złożonego z elementów o własności α mówimy, że x należy do zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy x należy do uniwersum A i posiada własność α. Zapisujemy to następująco: $x \in A \Leftrightarrow x \in U$ oraz $\alpha(x)$.

Na przykład zbiór A składa się ze studentów Politechniki, którzy uczęszczają na Wykład z Matematyki Dyskretnej. Zbiór ten jest wtedy definiowany przez relację uczęszczania na ten wykład.

Elementy zbioru wypisuje się pomiędzy nawiasami klamrowymi: "{" i "}" np. $A = \{$Jaś, Staś, Grześ$\}$.

Zbiór pusty jest to zbiór, który nie zawiera żadnych elementów. Oznaczamy go: $\emptyset$.

Zbiór liczb naturalnych: $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ Czasami używa się zbioru liczb naturalnych, który zawiera równiez 0.

Działania na zbiorach

Niech A, B będą dwoma zbiorami. Przypomnijmy sobie definicje podstawowych działań na zbiorach.

Mówimy że zbiór A *zawiera się w zbiorze* B (jest *podzbiorem* zbioru B) jeśli każdy element zbioru A należy równieżdo zbioru B, to znaczy dla każdego $a \in A$ zachodzi: $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Zapisujemy: $A \subseteq B$.

Mówimy, że $A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$. W przeciwnym przypadku $A \neq B$.
Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $A \neq B$, to $A \subset B$.

Mówimy, że zbiór A jest *właściwym podzbiorem* zbioru B jeśli $A \subset B$ oraz $A \neq \emptyset$.

Sumą zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony z tych elementów uniwersum, które należą do zbioru A **lub** do zbioru B.
Zapisujemy: $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Iloczynem (częścią wspólną) *zbiorów* A, B nazywamy zbiór złożony z tych elementów uniwersum, które należą do zbioru A **i** do zbioru B.
Zapisujemy: $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Różnicą zbiorów A, B nazywamy zbiór zło żony z tych elementów uniwersum, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.
Zapisujemy: $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge \sim x \in B\}$

Parą nieuporządkowaną nazywamy zbiór złożony z dwóch elementów a, b. W parze nieuporządkowanej kolejność nie jest ważna.
Zapisujemy: $\{a, b\}$
Uwaga: $\{a, b\} = \{b, a\}$ - jest to ta sama para nieuporządkowana

Parą uporządkowaną nazywamy ciąg złożony z dwóch elementów a, b. W parze uporządkowanej kolejność jest ważna.
Zapisujemy: (a, b)
Uwaga: $(a, b) \neq (b, a)$ - są to dwie różne pary uporządkowane

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór wszystkich par uporządowanych, w których pierwszy element pochodzi ze zbioru A a drugi ze zbioru B.
Zapisujemy: $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Pojęcie relacji

Relacją dwuargumentową na zbiorze $X \times Y$ nazywamy dowolny podzbiór R zbioru $X \times Y$.
Relacją dwuargumentową w zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór R zbioru $X \times X$.

Mówimy, że para (x, y) należy do relacji R i piszemy $(x, y) \in R$ lub, że x jest w relacji R z y i piszemy xRy.

Uwaga: Relacja składa się z par uporządkowanych zatem jeśli x jest w relacji R z y, to y nie musi być w relacji R z x.
Relację R, w której $xRy \Leftrightarrow yRx$ dla dowolnych x, y nazywamy *symetryczną*.

Funkcje i ich własności

Funkcją nazywamy relację $f \subseteq X \times Y$ taką, że: dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$ taki, że x jest w relacji f z y. Piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością funkcji* f dla *argumentu* x. Zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji* f a zbiór Y *przeciwdziedziną funkcji* f a funkcja f działa ze zbioru X w zbiór Y co zapisujemy $f : X \to Y$.

Funkcja $f : X \to Y$ jest *różnowartościowa* (mówimy, że f jest *iniekcją* i piszemy w skrócie, że f jest "1-1") wtedy i tylko wtedy gdy każdym dwóm różnym elementom x_1, x_2 zbioru X odpowiadają dwie różne wartości $f(x_1), f(x_2)$ funkcji f.

Funkcja $f : X \to Y$ jest *surjekcją* (*"na"*) wtedy i tylko wtedy gdy każdemu elementowi y zbioru Y odpowiada element x zbioru X taki, że y jest wartością funkcji f dla argumentu x czyli krótko pisząc: $y = f(x)$

Funkcja f jest bijekcją jeśli jest iniekcją i surjekcją (to znaczy jeśli jest "1-1" i "na").
Uwaga: Łatwo zauważyć, że funkcja $f : X \to Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden $x \in X$ taki, że $y = f(x)$

Funkcją odwrotną do funkcji $f : X \to Y$ nazywamy funkcję f^{-1} taką, że dla każdego $x \in X$ oraz $y \in Y$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Uwaga: Funkcja odwrotna do funkcji f istnieje wtedy i tylko wtedy gdy f jest róznowartościowa (jest iniekcją).

Spróbujmy omówić wprowadzone w tym rozdziale rodzaje i własności funkcji na pewnym intuicyjnym przykładzie.
Przykład Niech X będzie zbiorem dziewczynek a Y zbiorem chłopców, np. $X = \{$ Zosia, Gosia, Kasia $\}$, $Y = \{$ Jaś, Staś, Grześ $\}$.
Jak wiadomo dziewczynki są porządne i każda wybiera sobie dokładnie jednego chłopca. Przykładowo zdefiniujmy przekształcenie f następująco:

$$f(\text{Zosia}) = \text{Staś},$$

$$f(\text{Gosia}) = \text{Jaś},$$

$$f(\text{Kasia}) = \text{Jaś}.$$

Takie przyporządkowanie zbiorowi X zbioru Y jest oczywiście funkcją. Jeżeli dziewczynki są solidarne i każda wybierze innego chłopca to otrzymany funkcję różnowartościową. Jeżeli każdy chłopiec zostanie wybrany przez co najmniej jedną dziewczynkę, to otrzymamy funkcję "na". Stworzone poprzednio przekształcenie f nie jest ani różnowartościowe (bo Gosia i Kasia wybierają tego samego chłopca) ani "na" (bo Grzesia nie wybrała żadna dziewczynka).

Jeżeli każda dziewczynka wybierze innego chłopca i każdy chłopiec zostanie wybrany przez inną dziewczynkę, to otrzymamy funkcję, która jest bijekcją. Przykładowo, bijekcją jest następujące przyporządkowanie g chłopców dziewczynkom:

$$g(\text{Zosia}) = \text{Staś},$$

$$g(\text{Gosia}) = \text{Jaś},$$

$$g(\text{Kasia}) = \text{Grześ}.$$

Widać z tego przykładu, że stworzenie bijekcji pomiędzy dwoma zbiorami jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy mają one tyle samo elementów (aby dało się stworzyć bijekcję chłopców i dziewczynek musi być tyle samo).

Funkcja odwrotna do danej będzie definiowana przez taki wybór dziewczynek przez chłopców, przy którym każdy z nich wybiera tą dziewczynkę, która go wybrała (czyli jak w życiu - dziewczynki wybierają a chłopcom się tylko wydaje, że to oni :)) Funkcja odwrotna do bijekcji g wygląda następująco

$$g^{-1}(\text{Staś}) = \text{Zosia},$$

$$g^{-1}(\text{Jaś}) = \text{Gosia},$$

$$g^{-1}(\text{Grześ}) = \text{Kasia}.$$

Ciągiem o elementach ze zbioru X nazywamy dowolną funkcję $a : N \to X$.

Ciągiem różnowartościowym o elementach ze zbioru X nazywamy dowolną funkcję różnowartościową (iniekcję) $a : N \to X$.

Zauważmy, że ciąg różnowartościowy to po prostu ciąg, w którym żaden element zbioru X się nie powtarza.

Ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję $a : N \to R$.

n-tym wyrazem ciągu a nazywamy wartość a dla argumentu n, $n \in N$ i piszemy $a(n)$ albo a_n. Będziemy u żywać tego drugiego zapisu.

Ciąg o n-tym wyrazie a_n oznaczamy przez (a_n). Wypisując wyrazy ciągu ograniczamy je nawiasami otwrtymi (i). Czyli $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Uwaga: W ciągu kolejność jest istotna. W zbiorze kolejność nie jest istotna.

Funkcja $f : X \to Y$ jest *rosnąca* wtedy i tylko wtedy gdy dla dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcja $f : X \to Y$ jest *malejąca* wtedy i tylko wtedy gdy dla dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja $f : X \to Y$ jest *niemalejąca* wtedy i tylko wtedy gdy dla dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Funkcja $f : X \to Y$ jest *nierosnąca* wtedy i tylko wtedy gdy dla dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Moc zbioru

Mocą zbioru A (licznością zbioru A) nazywamy liczbę elementów zbioru A i oznaczmy przez $|A|$.

Zbiór skończony to zbiór, którego wszystkie elementy można wypisać. Łatwo zauważyć, że liczbę elementów zbioru skończonego można określic a więc ka żdy zbiór skończony ma moc daną pewną liczbą naturalną.

Dowolny zbiór o liczności n, $n \in N$ nazywamy *zbiorem n-elementowym.*

Zbiór, który nie jest skończony jest *nieskończony.*

Dwa zbiory A, B są *równoliczne* (to znaczy $|A| = |B|$) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$ pomiędzy nimi.

Łatwo uświadomić sobie prawdziwość tego faktu wracając myślami do przykładu z chłopcami i dziewczynkami.

Wykazanie, że dwa zbiory są równoliczne może więc sprowadzić się do obliczenia i porównania mocy obu zbiorów albo do znalezienia bijekcji pomiędzy nimi. Ten drugi sposób (ponieważ nie wymaga określenia mocy tych zbiorów) jest używany do wykazywania, że dwa zbiory nieskończone są równoliczne.

Zbiór A nazywamy *przeliczalnym* jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Elementy każdego zbioru przeliczalnego można ustawić w ciąg różnowartościowy (to znaczy po prostu ponumerować liczbami naturalnymi).