PROCESY STOCHASTYCZNE
ZADANIA DOMOWE - część 1

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe następującego procesu stochastycznego:
   a) $P(X_t = t) = 0.2$, $P(X_t = 2t) = 0.5$, $P(X_t = 3t) = 0.3$ dla $t \in (0, 1)$.
   b) $P(X = t) = \frac{1}{t}$, $P(X = \frac{t}{t-1}) = \frac{t-1}{t}$ dla $t = 2, 3, 4, \ldots$.
   c) $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = t) = \frac{1}{2}$.

2. Rzucamy 100 razy monetą. Jeśli w rzucie o numerze t wypadnie orzeł. to wygrywamy $5t$ złotych a jeśli reszka, to przegrywamy $10t$ złotych. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe wygranej w t-tym rzucie monetą. Wyniki zinterpetuj na wykresie.

3. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe procesu stochastycznego (X_t) o gęstości prawdopodobieństwa postaci:

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{, dla } 0 < x < \frac{1}{t} \\ 0 & \text{, dla pozostałych x} \end{cases}$$

4. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe procesu stochastycznego (X_t) o gęstości prawdopodobieństwa postaci:

$$f(x) = \begin{cases} t \cdot x & \text{, dla } 0 < x < \sqrt{\frac{2}{t}} \\ 0 & \text{, dla pozostałych x} \end{cases}$$

5. Dany jest proces Poissona (X_t) z parametrem $\lambda = 1$. Niech Y oznacza czas pomiędzy kolejnymi zmianami stanu procesu. Wyznacz a)$P(Y < 3)$, b)$P(Y \geq 1)$, c)$P(2 \leq Y < 4)$, d)$E(X_t)$.

6. Dany jest proces (X_t) błądzenia przypadkowego cząsteczki po osi OX (X_t-oznacza stan cząsteczki w chwili t). Wiadomo, że w momencie $t = 0$ cząsteczka jest w stanie 1 oraz w momentach $k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ cząsteczka wykonuje albo skok w prawo o 1 z prawdopodobieństwem p albo w lewo o 1 z prawdopodobieństwem q albo pozostaje w danym stanie z prawdopodobieństwem $r = 1 - p - q$. W punkcie $x = \frac{1}{2}$ jest ekran odbijający.
   a) Wyznacz wartość oczekiwaną tego procesu dla $t \in (0; 3\Delta t)$.
   b) Czy proces ten jest jednorodny?

7. Dany jest procesu (X_t) błądzenia przypadkowego cząsteczki po osi OX (X_t-oznacza stan cząsteczki w chwili t). Wiadomo, że w momencie $t = 0$ cząsteczka jest w stanie 2 oraz w momentach $k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ cząsteczka wykonuje albo skok w prawo o 1 z prawdopodobieństwem p albo w lewo o 1 z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. W punktach $x = \frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{7}{2}$ są ekrany odbijające.
   a) Wyznacz wartość oczekiwaną tego procesu dla $t \in (0; 4\Delta t)$.
   b) Czy proces ten jest jednorodny?

ODPOWIEDZI

1)a) $E(X_t) = 2.1t$, $D(X_t) = 0.7t$, b) $E(X_t) = 2$, $D(X_t) = \sqrt{\frac{t^2}{t-1} - 4}$, c) $EX_t = \frac{t}{2}$, $D(X_t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$.
2) $EX_t = \frac{15}{2}t$, $D(X_t) = \frac{5}{2}t$. 3) $E(X_t) = \frac{1}{2t}$, $D(X_t) = \frac{1}{\sqrt{12}t}$. 4) $E(X_t) = \frac{2\sqrt{2}}{3t}$, $D(X_t) = \frac{1}{3\sqrt{t}}$.
5) a) $1 - e^{-3}$, b)e^{-1}, c) $e^{-2} - e^{-4}$, d) $E(X_t) = t$.
6) a)

$$E(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t < \Delta t \\ r + q + 2p & \text{dla } \Delta t < t < 2\Delta t \\ 2rq + 3pq + r^2 + q^2 + 3p^2 + 4rp & \text{dla } 2\Delta t < t < 3\Delta t \end{cases}$$

b) nie.
7) a)

$$E(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t < \Delta t \\ q + 3p & \text{dla } \Delta t < t < 2\Delta t \\ q^2 + 4pq + 3p^2 & \text{dla } 2\Delta t < t < 3\Delta t \\ q^3 + 4q^2p + 8p^2q + p^3 & \text{dla } 3\Delta t < t < 4\Delta t \end{cases}$$

b) nie.