STATYSTYKA
LWZ
ZADANIA - CZĘŚĆ 2
ZMIENNA LOSOWA JEDNOWYMIAROWA.

1. Zorganizowano następującą grę. Rzucamy dwiema kostkami. Jeśli suma oczek jest równa 2 - otrzymujemy 5 zł, jeżeli 3 - 3 zł, a w każdym innym przypadku płacimy 1 zł. Niech X oznacza wygraną. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X.
2. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1 = \frac{2}{7}$, $p_2 = \frac{4}{7}$, $p_3 = c$. Znaleźć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.
3. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1 = c$, $p_2 = 2c$, $p_3 = 3c$. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.
4. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X: $P(X = 0) = 0.4$, $P(X = -1) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = c$. Znaleźć a) stałą c, b)dystrybuantę zmiennej losowej X,
c) funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuntę zmiennej losowej $Y = X^2 - 2X$,
d) $P(-\frac{1}{2} \le Y < 1)$.
5. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X: $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.3$. Znaleźć a)dystrybuantę zmiennej losowej X, b) funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuntę zmiennej losowej $Y = X^2$, c) $P(-1 < X \le 2)$.
6. Dystrubuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

a) Dla jakiego a zmienna X jest zmienną losową ciągłą.
b) Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.
7. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznaczyć a) stałą c b)dystrybuantę c) $P(\frac{1}{2} < X < 2)$. Otrzymany wynik zaznaczyć na wykresach gęstości i dystrybuanty. Obliczyć d) wartość oczekiwaną, e) wariancję, f) medianę g) kwantyl rzędu 0.2.
8. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{dla pozostałych} x \end{cases}$$

Znaleźć a) dystrybuantę, b) wartość oczekiwaną, c) wariancję zmiennej losowej X, d) $P(-1 < X \le 1)$ (otrzymany wynik zilustrować na wykresach gęstości i dystrybuanty).
9. Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 0) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.1$. Znaleźć a) dystrybuantę, b)wartość oczekiwaną, c) wariancję, d) modę, e) medianę f) kwantyl rzędu 0.6 g) kwantyl rzędu 0.4 zmiennej losowej X.

10. Wyznaczyć a) medianę, b) wartość oczekiwaną, c) odchylenie standardowe, d) kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ zmiennej losowej X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

11. Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -2) = 0.3$, $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.4$. Znaleźć a)wartość oczekiwaną, b) wariancję, c) modę, d) medianę e) kwantyl rzędu 0.7 zmiennej losowej X.

12. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student pewnej grupy umie rozwiązać to zadanie wynosi $\frac{8}{10}$. Prowadzący zajęcia sprawdza czy studenci potrafią poradzić sobie z tym zadaniem prosząc o podanie rozwiązania kolejnych losowo wybranych studentów. Sprawdzanie kończy się po przepytaniu 3 studentów lub w momencie trafienia na osobę, która potrafi je rozwiązać. Studenci odpowiadają niezależnie od siebie. Wyznaczyć a) funkcję prawdopodobieństwa, b) dystrybuante, c) wartość oczekiwaną liczby przepytanych studentów.

13. Zorganizowano następującą loterię. Los kosztuje 1 złoty. Prawdopodobieństwo wylosowania wygranej w wysokości 3 złotych (bez odliczeniu kosztu losu) wynosi $\frac{1}{5}$ a dla wygranej 5 złoty wynosi $\frac{1}{10}$. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Czy warunki loterii są korzystne dla organizatorów?

14. W urnie jest 5 węży w tym 3 jadowite. Losujemy kolejno po jednym wężu bez zwracania. Losowanie kończymy w momencie wylosowania węża jadowitego. Niech X oznacza liczbę wszystkich wylosowanych w ten sposób węży. Znajdź a) funkcję prawdopodobieństwa, b) wartość oczekiwaną zmiennej X.

ODPOWIEDZI

3) $c = \frac{1}{6}$; 4) a) $c = 0.2$; d) 0.4 5) b) $P(-1 < X \leq 2) = 0.3$ 6) a) $a = 1$; 7) a) $c = 2$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{18}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{3}$; 9) b) 0.8; c) 1.86 d) $m_0' = 0$, $m_0" = 2$; e) $x_{\frac{1}{2}} \in < 0, 1 >$; f)$x_{0.6} \in < 1, 2 >$; g) $x_{0.4} = 0$; 10) a) $x_{0.5} = 1$; b) 1; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) a) 0.1; b) 3.09; c) 2; d) $< -1; 1 >$; e) $x_{0.7} = 2$; 12) a) $P(X = 1) = 0.8$, $P(X = 2) = 0.16$, $P(X = 3) = 0.04$; c) 1.24; 13) 0.1, nie są korzystne, 14) a) $P(X = 1) = 0.6$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.1$, b) $E(X) = 1.5$.