

STATYSTYKA
dr inż Krzysztof Bryś

wykład 1

KLASYCZNY RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Pojęcia wstępne.

Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, którego wynik nie jest znany. Posiadamy jedynie informacje o zbiorze możliwych wyników tego doświadczenia. Wynik doświadczenia losowego wykluczający inne możliwe wyniki nazywamy *zdarzeniem elementarnym*.

UWAGA: Zakłada się, że w wyniku doświadczenia losowego zachodzi dokładnie jedno zdarzenie elementarne.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych* i oznaczamy przez Ω .

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny wynik doświadczenia losowego. Każde zdarzenie losowe jest zbiorem zdarzeń elementarnych

UWAGA: Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, to *zdarzeniem losowym* jest dowolny podzbiór zbioru Ω

Zdarzenie \emptyset nazywamy zdarzeniem *niemożliwym*.

Zdarzenie Ω nazywamy zdarzeniem *pewnym*.

Zdarzenie $\bar{A} = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem *przeciwnym* do A .

Jeżeli dla dwóch zdarzeń A i B zachodzi $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia te *wykluczają się* (są rozłączne).

Przykłady. Zdarzenie $A = \text{miesiąc kwiecień ma 31 dni}$ jest zdarzeniem niemożliwym. Zdarzenie $B = \text{miesiąc kwiecień ma 30 dni}$ jest zdarzeniem pewnym. Zdarzeniem przeciwnym do $C = \text{dzisiaj jest niedziela}$ jest zdarzenie $\bar{C} = \text{dzisiaj jest inny dzień tygodnia niż niedziela}$.

Rozważmy teraz przykład bardzo prostego doświadczenia losowego.

Przykład. Rozważmy doświadczenie losowe polegające na jednokrotnym rzucie monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z dwóch elementów, zdarzenia ω_O polegającego na wypadnięciu orła i ω_R , które oznacza wypadnięcie reszki. Wypiszmy wszystkie możliwe podzbiory zbioru Ω (zdarzenia losowe):

$$A_1 = \Omega = \{\omega_O, \omega_R\}, A_2 = \{\omega_O\}, A_3 = \{\omega_R\}, A_4 = \emptyset.$$

Zdarzenie A_1 polega na wypadnięciu orła lub reszki. Jest to zdarzenie pewne. Zdarzenie A_4 polegające na niewypadnięciu ani orła ani reszki nie może zajść w wyniku naszego doświadczenia losowego. Jest to zdarzenie niemożliwe. Zdarzeniem przeciwnym do A_2 - wypadł orzeł jest zdarzenie A_3 - wypadła reszka. Zwróćmy uwagę na to, że $A_2 \cup A_3 = \Omega$ (w wyniku rzutu monetą wypadnie orzeł lub reszka) oraz $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ (nie może wypaść jednocześnie orzeł i reszka).

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, to znaczy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$. Dla dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ takiego, że $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, gdzie $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, definiuje się funkcję

prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_k}\}).$$

W przypadku, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to znaczy $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}$, otrzymujemy następujący wzór:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{N} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}.$$

Powyższa definicja prawdopodobieństwa nie jest poprawna w ogólności, gdyż zbiór Ω nie musi być skończony a zdarzenia elementarne nie muszą być jednakowo prawdopodobne.

3. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{Z} \subseteq 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$ zbiorem zdarzeń losowych. Funkcją prawdopodobieństwa nazywamy funkcję:

$$P : \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$$

spełniającą następujące trzy aksjomaty:

- P1) $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{Z}$,
- P2) $P(\Omega) = 1$
- P3) jeżeli A_1, A_2, \dots, A_n jest ciągiem zdarzeń rozłącznych (to znaczy $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

Wartość funkcji P na zbiorze A nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A

4. Własności prawdopodobieństwa.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$.
3. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) \leq 1$.
4. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są parami rozłączne, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

5. Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Doświadczenia niezależne = dowolny wynik jednego z nich nie wpływa na wynik drugiego.

Zdarzenia niezależne = zdarzenia A, B , dla których:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

albo

$$P(A|B) = P(A) \text{ lub } P(B|A) = P(B)$$

Informacja o zajściu jednego z nich nie zmienia szans wystąpienia drugiego.