STATYSTYKA

dr inż Krzysztof Bryś

wykład 3

Podstawowe teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej jednowymiarowej

Typu skokowego

1. Rozkład jednopunktowy.

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = c) = 1$ dla pewnej stałej c
Wartość oczekiwana: $E(X) = c$
Wariancja: $D^2(X) = 0$
Interpretacja: Rozkład dowolnej stałej liczbowej X.

2. Rozkład dwupunktowy (zerojedynkowy).

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = q = 1 - p$
Wartość oczekiwana: $E(X) = p$
Wariancja: $D^2(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$
Interpretacja: Rozkład dowolnej zmiennej X, która odpowiada na pewne pytanie albo TAK ($X = 1$-"sukces") albo NIE ($X = 0$-"porażka"), rozkład dowolnej cechy "zero-jedynkowej" (obiekt albo ją posiada ($X = 1$) albo nie posiada ($X = 0$).

3. Rozkład Bernoulliego (dwumianowy) - $B(n, p)$

Schemat doświadczeń Bernoulliego:
- n niezależnych doświadczeń,
- w każdym doświadczeniu albo sukces z prawdopodobieństwem p albo porażka (z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$);

Interpretacja: Zmienna losowa X ma rozkład $B(n, p)$ jeśli mówi o liczbie sukcesów w schemacie n niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p w każdym z nich. Jest sumą n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zerojedynkowym.
Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q = 1 - p$.
Wartość oczekiwana: $E(X) = np$
Wariancja: $D^2(X) = n \cdot p \cdot q$

4. Rozkład Poissona - $\mathcal{P}o(\lambda)$

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$
Wartość oczekiwana: $E(X) = \lambda$
Wariancja: $D^2(X) = \lambda$
Interpretacja: Rozkład graniczny dla rozkłaadu $B(n, p)$ przy $n \to +\infty$. Dla dostatecznie dużych n, zmienna losowa o rozkładzie $B(n, p)$ ma w przybliżeniu rozkład Poissona z parametrem $\lambda = n \cdot p$.

Typu ciągłego

1. Rozkład jednostajny na przedziale $(a; b)$ - $U(a, b)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, dla } a < x < b \\ 0 & \text{, dla pozostałych x} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
Wariancja: $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Interpretacja Zmienna losowa X ma rozkład $U(a, b)$ jeśli przyjęcie przez tą zmienną dowolnej wartości z przedziału $(a; b)$ jest jednakowo prawdopodobne.

2. Rozkład normalny (Gaussa) - $N(m, \sigma)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in R$
Wartość oczekiwana: $E(X) = m$
Wariancja: $D^2(X) = \sigma^2$
Wykresem powyższej funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest **krzywa Gaussa**
Zmienna losowa standaryzowa dla zmiennej losowej o rozkładzie $N(m, \sigma)$:

$$\overline{X} = \frac{X - m}{\sigma}$$

ma rozkład normalny standardowy $N(0, 1)$.
Dystrybuanta rozkładu normalnego standardowego $N(0, 1)$**:**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ dla } x \in R$$

Z parzystości funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu $N(0, 1)$ wynika, że: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
u_α - kwantyl rzędu α zmiennej losowej o rozkładzie $N(0, 1)$ (tzn. $\Phi(u_\alpha) = \alpha$)

3. Rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody

Zmienna losowa $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, gdzie $X_1, X_2, \ldots X_n$ zmienne o rozkładzie $N(0, 1)$ ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody
Wartość oczekiwana: $E(\chi^2) = n$
Wariancja: $D^2(\chi^2) = 2n$
Dla dużych n ($n > 40$) rozkład chi-kwadrat o n stopniach swodody można przybliżać rozkładem $N(n, \sqrt{2n})$.
$\chi^2(\alpha, n)$ = kwantyl rzędu $1 - \alpha$ zmiennej o rozkładzie chi-kwadrat o n stopniach swobody

4. Rozkład t-Studenta o n stopniach swobody.

Zmienna losowa $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$, gdzie X zmienna losowa o rozkładzie $N(0, 1)$ a zmienna χ^2 ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody.
Wartość oczekiwana: $E(T) = 0$.
Wariancja: $D^2(T) = \frac{n}{n-2}$.
Dla dużych n ($n > 40$) rozkład t-Studenta o n stopniach swodody można przybliżać rozkładem $N(0, 1)$.
$t(\alpha, n)$ = kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ zmiennej o rozkładzie t-Studenta o n stopniach swobody.